Title	素粒子物理学におけるクォーク閉じ込めの課題(シンポジウム「素粒子論と物性論」,研究会報告)
Author(s)	益川, 敏英
Citation	物性研究 (1980), 34(5): E29-E36
Issue Date	1980-08-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/90132
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

$$-\pi Q_c = (i\pi/\beta)(iQ_c) = \mu_{\mathrm{FP}} N_{\mathrm{FP}}$$

と書けば，FP－お化けに対する chemical potential μ_{FP}が純虚数 $i\pi/\beta$ で入いっていると見做せるので，その効果は単に，FP－お化けの温度グリーン函数を（fermi 統計に従うが）周期的なものにとっておくだけで採り入れられる。

我々の formalismは，その他，quark confinementや Higgs 機構に対するいくつかの一般的な結論を出したり，U(1) 問題， Weinberg-Salam 理論での charge universality，等の問題にも有用である（事もある？）ので，それらに興味ある方は，Ref. 1）或いはその引用文献を是非お読み下さい。

参 考 文 献

1) T. Kugo and I. Ojima, Prog. Theor. Phys. Supplement, 66 (1979).
2) H. Hata and T. Kugo, Phys. Rev. **D21** (1980), 3333.
3) N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **62** (1979), 1385.
4) 素研の 1980 年 5 or 6 月号の「素粒子物理学に於ける場の理論研究会」報告にも解説があります。

素粒子物理学におけるクォーク閉じ込めの課題*)

京大・基研　益 川 敏 英

§1. 閉じ込め問題の素粒子物理学における位置

0） quark conf. は quark が実験的に未発見だからと云うことのみの理由で必要なのではない。

それは，今日の非常に豊富な実験事実を統一的に理解しうる，今日知られている唯一の hadron 描像である。

（i） mag. mom. ⇒ hadron 中の quark の有効質量軽い。（u,d–quark; 約 3 分の 1 核子質量）

⇨実効的には quark は軽くて強くない束縛状態として hadron を作っている。

*) 当日の話に多少筆を加えた部分がある。また当日の内容を文章にすると少々長くなるので，読み辛くなると思うが個条書きで御許し頂くこととした。

（ii） hadron spectrum，散乱振巾の Duality ⇒ hadron のひも描像

（iii） asymptotic free + parton treatment（特に hadronization）⇨やわらかいひも描像

1） quark conf. に必要な道具だては素粒子物理学が他の理由から必要とし，確立して来たものそのものであった。

（i） 色の自由度とそれの gauge 化。 Baryon の quark 複合模型より統計性を理解する上で色の自由度が必要となり，$\pi^0 \to 2\gamma$ の Adler の分析によりこの自由度の存在は支持されている。この自由度を gauge 化することにより強い相互作用を導入すれば，強い相互作用の非常に大きな性質の一つである高エネルギーでの asymptotic free の性質が自然に理解出来る。また，電磁相互作用，弱い相互作用は gauge 対称性を持ち，重力についても gauge 理論として理解出来るので，全ての相互作用は gauge 理論であるとする見方は自然である。これは Einstein の統一描像（物理の接続の幾何学化）とも連ながる。強い相互作用と Weinberg–Salam 理論を統一した大統一模型による gauge 理論は多くの成功を収めている。そこには本来重力とは無関係のはずだが重力を特徴ずける Plank 質量に近い量が現われる。他にも重力との関係を匂わすものがある。

（ii） ひもを作る機構。 第二種超電導体に磁場が侵入すると糸状に磁場がしぼられる機構は Ginzburg–Landau の理論として知られている。今の場合は色荷電を閉じ込めるので完全反誘電性が我々の世界の真空に要求される。色荷電の源から quark を引き離そうとするとき電場が一次元的にしぼられていれば電束はどれだけ距離が大きくなっても一定であるから，quark は常に一定の力を感じることとなり，マクロな距離を引き離す為にはマクロなエネルギーが必要となる。ひも模型は我々が hadron の示す性質を理解する為の描像とも一致する。

（iii） 完全反誘電性。 QED においてはくりこまれた相互作用常数 e_r とはだかのそれ e_0 とを比較すれば $e_r^2 < e_0^2$ であることが知られている。これは QED の真空が電子対の海であり，それが示す誘電性として理解出来る。QCD（量子色力学）においては $e_0^2 < e_r^2$（as. free の性質）である。これは QCD の真空が反誘電体であることを示す。これが完全であるかどうかを知ることが quark conf. の本質である。

2） "閉じ込め"機構は無いものねだりではない。 存在するものが観測出来ないのは可笑しいと云う意見がある。可笑しいと云う内容が原理的に不可能な事を要求していると云う内容なら，"閉じ込め"が生じている実例があればよい。 primary lagrangian を書く際に導入された場と同じ量子数を持った粒子が asymptotic field として現われない事を"閉じ込め"と云う事にすれば，2次元 QCD，3次元 Compact QED 等[1)]色々とその様な例はある。

この意味で無いものねだりではない。可笑しいと云う内容が物理の問題であれば，閉じ込めの機構が分かれば理論と実験を通じて quark の必要な全ての属性は知ることが出来るはずである。別の云い方をすれば量子力学の世界について知っている知り方もこの様な間接的な理解である。直接見たり，観測出来ることが存在の必要条件ではない。可笑しいと云うのが哲学的立場の問題ならそれは人が選ぶのでなく，自然が選ぶべき問題であり上記で述べたごとく，自然は閉じ込めの機構を選んでいると考える方が自然でありその証拠は山ほどある。

§2. Gauge とは何か（内部自由度に関する接続の幾何である。省略）

§3. QEDとQCD

ある方法で閉じ込めの機構を理解出来たなら，その後は今行なわれている色々なアプローチのほとんど全でそれは再現出来よう。しかし最初の方法に成り得るものはその内の少数であろうう。閉じ込め問題は相転移の問題であって見れば exact に解析出来て斯く斯くとは成らないであろう。何んらかの意味で近似を導入せざるを得まい。この近似が評価出来ればそれは解けたに等しい。むしろ近似の正当性は物理的直感，取り扱いと得られた結果等全体の整合性合理性より評価することになろう。一つの判断規準は閉じ込めの生じていないQEDと閉じ込めの生ずるQCD を並行的に取り扱い，QED とQCD の違いの反映として非閉じ込め，閉じ込めの機構が自然に理解出来るかと云う事であろう。特にその中で abelian gauge と non abelian gauge の差違がどう云うように作用しているかであろう。この意味で $A_0=0$ gauge は興味深い。量子化がもっとも簡単であり，hamiltonian も simple である。またこのゲージでは時間に依存しないゲージ変換は固定していなくて，物理的状態を選び出す条件を導入することにより処理されているのでゲージ対称性の役割が見やすい。

1） $A_0=0$ gauge による量子化

lagrangian density：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\,\mathrm{T_r}[\dot{\boldsymbol{A}}^2-\boldsymbol{H}^2]-\sum\overline{\varphi}_i[\gamma_\mu(\partial_\mu-igA_\mu)+m_i]\varphi_i$$

$$\boldsymbol{H}_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\{\partial_j A_k-\partial_k A_j-ig[A_j A_k]\}$$

A_i：ゲージ場，φ_i：フェルミオン場（電子or quark, i はflavor の自由度）

$$\boldsymbol{E}\overset{def.}{=}\dot{\boldsymbol{A}},\ [\boldsymbol{A}_i^\alpha(x)\boldsymbol{E}_j^\beta(y)]=i\,\delta_{ij}\,\delta^{\alpha\beta}\,\delta(x-y)$$

$$\{\phi_{\mu i}(x)\,\phi^*_{\nu j}(y)\} = \delta_{ij}\,\delta_{\mu\nu}\,\delta(x-y),\ \text{他は zero}$$

hamiltonian density：

$$\mathscr{H}(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2) + \sum\phi^*[\,\boldsymbol{\alpha}(-i)(\nabla - ig\boldsymbol{A}) + m\,]\phi$$

gauge 変換の generator ：

$$\Lambda^\alpha(x) = \frac{1}{g}\,\partial E^\alpha - i[\,A_i\,E_i\,]^\alpha - \phi^*\,\lambda^\alpha\,\phi$$

$$[\,\textstyle\int dx\,\mathscr{H}(x),\ \Lambda^\alpha(y)\,] = 0$$

physical state condition ：

$$\Lambda^\alpha(x)\,|\,\mathrm{phys}\rangle = 0 \quad (\,\text{Lorentz 共変性より必要}\,)$$

☆QEDの場合

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{tr}} + \boldsymbol{E}_\ell,\quad (\boldsymbol{E}_{\mathrm{tr}})_i = \frac{\delta_{ij} - \nabla_i\nabla_j}{\nabla^2}\boldsymbol{E}_j,\quad \boldsymbol{E}_\ell = \nabla\cdot\frac{1}{\nabla^2}(\nabla\boldsymbol{E}).$$

$$\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{E}^2_{\mathrm{tr}} + \boldsymbol{E}^2_\ell,\quad \boldsymbol{E}^2_\ell = \nabla\boldsymbol{E}\cdot\frac{-1}{\nabla^2}\nabla\boldsymbol{E},\quad \nabla\boldsymbol{E} = (\,e\phi^*\phi + e\Lambda)$$

また　$\phi_0 = \mathrm{e}^{-ie\frac{1}{\nabla^2}\nabla\boldsymbol{A}}\cdot\phi$ で ϕ_0 を導入すれば

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2_{\mathrm{tr}} + \boldsymbol{H}^2) + \phi_0^*[\,\boldsymbol{\alpha}(-i)(\nabla - ie\boldsymbol{A}_{\mathrm{tr}}) + m\,]\phi_0$$
$$+ (\,e\Lambda + e\phi_0^*\phi_0)\frac{-1}{\nabla^2}(\,e\Lambda + e\phi_0^*\phi_0)$$

と書ける。$\Lambda(x)$ は ϕ_0, ϕ_0^*, $\boldsymbol{E}_{\mathrm{tr}}$ と $\boldsymbol{H}$ と可換であり physical state condition $\Lambda(x)|\,\mathrm{phys}\rangle = 0$ より計算のあらゆる段階で zero としてよい。この結果として得られる hamiltonian は coulomb gauge でのそれに一致する。ここで注意したいことは coulomb potential を持った coulomb gauge での電子 ϕ_0 (gauge 不変!!) は gauge 変換の下で $\phi(x) \to \mathrm{e}^{i\alpha(x)}\phi(x)$ と変換を受ける $A_0 = 0$ の場と

$$\phi_0(x) = \mathrm{e}^{-ie\frac{1}{\nabla^2}\nabla A}\phi \qquad (イ)$$

と云う関係で結ばれている。$A_0 = 0$ gauge においては physical observable は gauge inv. であるから，physical な電子を表わす場はある path measure μ(path) があって次のよ

うに書けるはずである。

$$\int d\mu(\mathrm{path})\ e^{i\int_x^\infty dy_\mu A_\mu(y)}\phi(x)$$

これが(イ)に一致するためには path measure は適当なポテンシャル中での randam walk として記述出来ることを示すことが出来る。すなわち coulomb potential を持った電子は path dependent phase factor $e^{i\int dy A(y)}$ をあらゆる path について適当な重みで重ね合せたものとして理解出来る。

☆ QCDの場合

(イ) observable $\mathcal{O}$, $[\Lambda^\alpha(x), \mathcal{O}]=0$

(ロ) loop 代数

群 SU(N) を特徴ずける代数は

$$\sum \mathrm{sgn}\,\sigma\, \delta_{i_1}^{j_{\sigma(1)}} \delta_{i_2}^{j_{\sigma(2)}} \cdots \delta_{i_n}^{j_{\sigma(n)}}=0 \qquad (n>N)$$

$$\varepsilon^{j_1\cdots j_N}\varepsilon_{i_1\cdots i_N}=\sum \mathrm{sgn}\,\sigma\, \delta_{i_1}^{j_{\sigma(1)}}\cdots\delta_{i_N}^{j_{\sigma(N)}}$$

より導かれる。(これにつきる)(その他については省略)

(ハ) 't Hooft の代数(省略　ref. 2 を参照下さい。)

(ニ) K. Wilson の面積則(省略　ref. 3 を参照下さい。)

(ホ) 't Hooft の代数の表現論(省略　ref. 2を参照下さい。)

(へ) lattice model の問題点(省略)

(ト) 't Hooft の E–H duality relation (省略　ref. 4 を参照下さい。)

(ハ)～(ト)で云いたいことは, non abelian gauge の場合massless粒子がphysical state に現われなければ電場か磁場のどちらかがしぼられて Vortex 状になると云うことが示せると云うことである。

(チ) Fradkin and Susskind (ref. 5)の 3＋1 次元 z_2 gauge modelの分析

このmodelはσ－変数とμ－変数を使って hamiltonian を書くことにより相互作用常数λの世界とλ^{-1}の世界が dual である事が示せる。σ_3を loop C上に置いた量A(c)とμ_3を置いた量 B(c)は 't Hooft の代数を満すのでA, Bのどちらかが area low (Vortex を作る相)でなければならない事が分るが, たしかに直接の計算でも$\lambda<1$ ($\lambda>1$)のときσ_3－Vortex (μ_3－Vortex)相でありμ_3 (σ_3)についてはunconfine相となっている。この事は次の様に理解しておくことが出来る。σ_3の源がA, B二点にあったとき

Gauge 不変な状態はABを結ぶ path 上に σ_3 を置いた状態である。この状態のエネルギーをAB間(充分大きくして)の距離で割ったものをテンション$T(\lambda)$とすれば, $\lambda=0$から大きくして行くとTは小さくなるがfiniteであって閉じ込めの相を表わす$\lambda\geq 1$となるTは zero となりstringは切れて無限の遠方までのび, 単独の源のエネルギーは有限となる。(非閉じ込め相) この事はセツ動計算の範囲であるがトレース出来る。またQEDの場合は前に示したようにpath dependent phase factorの path が無限の彼方までのびた場合に成っている。QCDの場合に$\lambda<1$の場合に対応することを示すことが課題である。

§ 4. loop 力学[6)]

i) pure SU(N) gauge model の hamiltonian は次のように書ける。

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\int d^3x\left(g^2\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{g^2}\boldsymbol{H}^2\right)$$

$$[A_i^\alpha(x)\ E_j^\beta(y)]=\delta_{ij}\ \delta^{\alpha\beta}(x-y)$$

$$\boldsymbol{H}_i=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\{\partial_j A_k-\partial_k A_j-i[A_j\ A_k]\}$$

ここでloop γに対応する wilson loop op. を$W(\gamma)$で表わせば$\boldsymbol{H}^2$は次のように書ける。

$$\frac{1}{2}\int d^3x\mathrm{Tr}\boldsymbol{H}^2=\lim_{\gamma_0\to 0}\frac{1}{\sum\limits_{|\gamma|\leq\gamma_0}^{*}1}\cdot\sum_{|\gamma|\leq\gamma_0}3\cdot\frac{N-W(\gamma)}{|\gamma|}$$

$|\gamma|$はγの面積。$\sum^*$はloopの中心が原点にあるもののみの和に制限する。この表現によりwilson loopの時間発展は次の様に書ける。

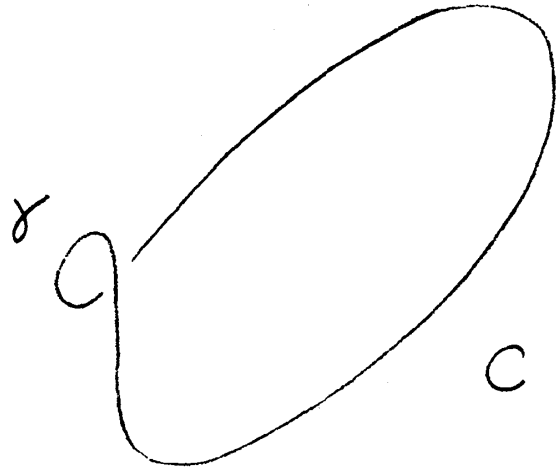
$$i\frac{\partial}{\partial t}W(c)=[\mathscr{H},\ A(c)]=-i\int d\boldsymbol{x}_i\ P(\boldsymbol{E}_i(x)W(c))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}W(c)=\int dx_i\ dy_j\ P(\boldsymbol{E}_i(x)\,\boldsymbol{E}_j(y)W(c))$$

$$+\lim_{\gamma_0\to 0}\sum_{|\gamma|\leq\gamma_0}\frac{1}{\sum^*1}\cdot\frac{1}{|\gamma|}W(\gamma*c)\cdot\delta^2(0) \qquad (ロ)$$

ここでPは loop c上での ordered product を表わす。$\gamma*c$は図1のようにγとcを結合したloopを表わす。

「コメント：$\int d^3x\boldsymbol{E}^2$ は$W(c)$に作用させると，しばしば$\delta^2(0)$の様な発散を持たらす。しかしこれは$W(c)$がAについて一次元積分しかしていないためであり，(イ)式の所で示したように適当な重みで loop cについて加え合せば，それはAの汎函数と見た場合



$$\int d\mu(c)W(c)$$

$$=\sum\int d^3x_1\cdots d^3x_n f_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x_1\cdots x_n)A_{\alpha_1}(x_1)\cdots A_{\alpha_n}(x_n)$$

図1

となりfはなめらかな函数に取ることが出来て，$\int d^3x\boldsymbol{E}^2(x)$の作用には$\delta^2(0)$のような発散は現われない。くりこみを必要とする発散の現われるのは$\boldsymbol{E}^2$と$\boldsymbol{H}^2$の干渉項である。この意味で単独の loop c 上で定義されない$W(c)$は良い物理量とは云えない。」

式(ロ)の第二項に現われた$\delta^2(0)$はγの和と規格化$\sum^*1$で有限になるので問題は生じない。$r_0\to 0$の極限で non abelian の場合$\boldsymbol{E}^2$と$\boldsymbol{H}^2$の干渉項よりくりこみを必要とする発散が生ずる。また pure Gauge Model では次元を持った量はたった一つくりこみ点のみであるから，Vortex の巾を決めて行くには$\boldsymbol{E}^2$と$\boldsymbol{H}^2$の干渉が本質的である。

ii) $\boldsymbol{H}^2/g^2$無視の近似

この近似は lattice model では string tension が$\boldsymbol{E}^2$の項からやって来てこれで confine されると考えているのでこの近似は興味深い。連続時空の場合でも$\boldsymbol{H}^2/g^2$の項を無視すればexact に解ける。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(x)=[\int d^3x\frac{g^2}{2}\boldsymbol{E}^2, \boldsymbol{A}]=-igg^2\boldsymbol{E}(x)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}=0$$

これ等より$\boldsymbol{A}(x, t)=\boldsymbol{A}(x)-g^2\boldsymbol{E}(x)t$

$$W(c, t)=P\cdot e^{i\int_c dx(\boldsymbol{A}-g^2\boldsymbol{E}t)}$$

ここで$W(c, t)$を波動函数と考える。($W(c, t)$を1に作用させる)

$$W(c, t)1=e^{-i\frac{g^2}{2}\delta^2(0)\ell_c c(N)t}W(c)1$$

となり，これは loop の長さℓ_cに比例したエネルギーで振動しているように見える。しか

し，この結論は正しくない。$\delta^2(0)$ の項が現われている事からも分るように，この状態は非常に高エネルギーの状態を表わしており安定でない。適当な重みで c について重ね合せる事により $\delta^2(0)$ の発散は消えてしまい，上記の事からエネルギーは長さに比例すると云う答は得られない。たしかにQEDのときはあるpotential場の下でのrandam walk measureについて加え合せば $\delta^2(0)$ の振動はなくなり，coulombエネルギーで振動することを示すことが出来る。non abelianの場合はどうなるであろうか?

iii）loop measureの表現法

単独のloop c に対応したwilson loopは良い力学変数でないと上記で指摘した。適当なloop measureで積分しておく必要がある。これはloopの集合を重みまで含めて生成する確率過程として表現出来る。また(ロ)式の第二項は $r_0 \to 0$ で一種のrandam walkを生成するのでこの取り扱いは興味深い。しかし予定の紙面を大巾に超過しているので，この内容については別の機会に譲りたい。(当日はマルコフ過程として表現する方法について論じた。)

References

1) 例えば，G. 't Hooft, N.P. **B75** (1974) 461, C.G. Callan, Jr., N. Coote and D.J. Gross, P.R. **D13** (1976) 1649, A.M. Polyakov, N.P. **B120** (1977) 429.
2) G. 't Hooft, N.P. **B138** (1978) 1.
3) K.G. Wilson, P.R. **D10** (1974) 2445.
4) G. 't Hooft, N.P. **B153** (1979) 141.
5) Fradkin and Susskind P.R. **17D** (1978) 2637.
6) S. Mandelstam, P.R. **175** (1968) 1580. G. 't Hooft, N.P. **B138** (1978) 1. S. Mandelstam, P.R. **D19** (1979) 2391. A.M. Migdal, a preprint (London Inst., 1979). A.M. Polyakov, a preprint (London Inst., 1979). B. Sabita, a preprint (CCNY–HEP–79/8). K. Kikkawa, a preprint (HUPD 7922 Dec. 1979).